جمع تکانه‌های زاویه‌ای

$$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$$

$$J_1^2 \; J_{1z} \; J_2^2 \; J_{2z} \longrightarrow J_1^2 \; J_2^2 \; J^2 \; J_z$$

$$|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle \qquad |j_1 j_2 j m\rangle$$

اختصاراً

$$= |m_1 m_2\rangle \qquad = |j m\rangle$$

$$|jm\rangle = \sum_{m_1' m_2'} |m_1' m_2'\rangle \underbrace{\langle m_1' m_2' | j m\rangle}_{\text{ضرایب کلبش گوردان}}$$

به عنوان یک حالت خاص می‌بینیم:

$$\vec{J}_1 = \vec{S}, \quad \vec{J}_2 = \vec{L} \Rightarrow \vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

$$s \qquad l \qquad j$$

$$m_s \qquad m_l \qquad m \qquad |l-s| \leq j \leq l+s \Rightarrow l-\tfrac{1}{2} \leq j \leq l+\tfrac{1}{2}$$

$$|j m\rangle = \sum_{m_l' m_s'} |m_l' m_s'\rangle \langle m_l' m_s' | j m\rangle \qquad (1)$$

$$\begin{pmatrix} |j = l+\frac{1}{2}, m\rangle \\ |j = l-\frac{1}{2}, m\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle m_l = m-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} | j = l+\frac{1}{2}, m\rangle & \langle m_l = m+\frac{1}{2}, \frac{-1}{2} | j = l+\frac{1}{2}, m\rangle \\ \langle m_l = m-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} | j = l-\frac{1}{2}, m\rangle & \langle m_l = m+\frac{1}{2}, \frac{-1}{2} | j = l-\frac{1}{2}, m\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |m_l = m-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \\ |m_l = m+\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\rangle \end{pmatrix}$$

J_- را به رابطهٔ (1) اثر می‌دهیم:

$$J_-|jm\rangle = \hbar\sqrt{(j+m)(j-m+1)}\,|j, m-1\rangle$$

$$= \left(J_{l-} + J_{m-}\right) \sum_{m_l' m_s'} \langle m_l' m_s' | j m\rangle |m_l' m_s'\rangle \qquad (2)$$

به جای j می‌گذاریم $l+\frac{1}{2}$ و J_{l-} روی m_l' را هم حساب می‌کنیم.

طرف چپ

$$J_-|jm\rangle = \hbar\sqrt{(l+\tfrac{1}{2}+m)(l+\tfrac{1}{2}-m+1)}\,|l+\tfrac{1}{2}, m\rangle$$

طرف راست

$$= \sum_{m_l' m_s'} \hbar \langle m_l' m_s' | j m\rangle \left\{ \sqrt{(l+m_l')(l-m_l'+1)}\,|m_l'-1, m_s'\rangle + \sqrt{(s+m_s')(s-m_s'+1)}\,|m_l', m_s'-1\rangle \right\}$$

بجای m ، $m+1$

$$\sqrt{\left(l+\tfrac{1}{2}+m+1\right)\left(l+\tfrac{1}{2}-m\right)}\,\left|\,l+\tfrac{1}{2},m\right\rangle$$

$$=\sum_{m_l',m_s'}\Big\{\sqrt{(l+m_l')(l-m_l'+1)}\,\left\langle m_l' m_s' \middle| l+\tfrac{1}{2},m+1\right\rangle \left|m_l'-1,m_s'\right\rangle$$
$$+\sqrt{(s+m_s')(s-m_s'+1)}\,\left\langle m_l' m_s' \middle| l+\tfrac{1}{2},m+1\right\rangle \left|m_l',m_s'-1\right\rangle\Big\}$$

$$\langle m_l, m_s| \times (\quad) \Rightarrow$$

$m_l+1=m_l'$ شرط

$$\sqrt{\left(l+\tfrac{3}{2}+m\right)\left(l+\tfrac{1}{2}-m\right)}\,\left\langle m_l m_s \middle| l+\tfrac{1}{2},m\right\rangle$$

$$=\sum\Big\{\sqrt{(l+m_l')(l-m_l'+1)}\,\left\langle m_l' m_s' \middle| l+\tfrac{1}{2},m+1\right\rangle \overbrace{\left\langle m_l m_s \middle| m_l'-1,m_s'\right\rangle}^{\delta_{m_l,m_l'-1}\,\delta_{m_s,m_s'}}$$
$$+\sqrt{(s+m_s')(s-m_s'+1)}\,\left\langle m_l' m_s' \middle| l+\tfrac{1}{2},m+1\right\rangle \underbrace{\left\langle m_l m_s \middle| m_l',m_s'-1\right\rangle}_{\delta_{m_l,m_l'}\,\delta_{m_s,m_s'-1}}\Big\}$$

$$=\sqrt{(l+m_l+1)(l-m_l)}\,\left\langle m_l+1,m_s \middle| l+\tfrac{1}{2},m+1\right\rangle$$

$m_s+1=m_s'$ شرط

$$+\sqrt{(s+m_s+1)(s-m_s)}\,\left\langle m_l,m_s+1 \middle| l+\tfrac{1}{2},m+1\right\rangle$$

$\left(s=\tfrac{1}{2}\ ,\ \text{مثلاً}\ m_s=\tfrac{1}{2}\ ,\ m_l=m-m_s=m-\tfrac{1}{2} \right)$: [illegible] $\Rightarrow$

$$\sqrt{\left(l+\tfrac{3}{2}+m\right)\left(l+\tfrac{1}{2}-m\right)}\,\left\langle m-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2} \middle| l+\tfrac{1}{2},m\right\rangle$$

$$=\sqrt{\left(l+m+\tfrac{1}{2}\right)\left(l-m+\tfrac{1}{2}\right)}\,\left\langle m+\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2} \middle| l+\tfrac{1}{2},m+1\right\rangle+\cancel{\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+1\right)\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\right)}\,\langle\ \rangle}^{\,0}$$

$$\Rightarrow \left\langle m-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2} \middle| l+\tfrac{1}{2},m\right\rangle=\sqrt{\frac{\left(l+m+\tfrac{1}{2}\right)\left(l-m+\tfrac{1}{2}\right)}{\left(l+m+\tfrac{3}{2}\right)\left(l-m+\tfrac{1}{2}\right)}}\,\left\langle m+\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2} \middle| l+\tfrac{1}{2},m+1\right\rangle$$

$$\boxed{\left\langle m-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2} \middle| l+\tfrac{1}{2},m\right\rangle=\sqrt{\frac{l+m+\tfrac{1}{2}}{l+m+\tfrac{3}{2}}}\,\left\langle m+\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2} \middle| l+\tfrac{1}{2},m+1\right\rangle}\ \ast$$

در رابطه ☆ m را به m+1 تبدیل می‌کنیم

$$\Rightarrow \left\langle m+\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| l+\frac{1}{2}, m+1 \right\rangle = \sqrt{\frac{l+m+\frac{3}{2}}{l+m+\frac{5}{2}}} \left\langle m+\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \middle| l+\frac{1}{2}, m+2 \right\rangle$$

☆☆

اینک می‌توانیم در طرف دوم رابطه ☆ جایگذاری کنیم ⇐

$$\left\langle m-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| l+\frac{1}{2}, m \right\rangle = \sqrt{\frac{l+m+\frac{1}{2}}{l+m+\frac{3}{2}} \cdot \frac{l+m+\frac{3}{2}}{l+m+\frac{5}{2}}} \left\langle m+\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \middle| l+\frac{1}{2}, m+2 \right\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{\left\langle m-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| l+\frac{1}{2}, m \right\rangle = \sqrt{\frac{l+m+\frac{1}{2}}{l+m+\frac{5}{2}}} \left\langle m+\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \middle| l+\frac{1}{2}, m+2 \right\rangle}$$

☆☆☆

حالا می‌توانیم در رابطه ☆☆ m را m+1 تبدیل کنیم

$$\left\langle m+\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \middle| l+\frac{1}{2}, m+2 \right\rangle = \sqrt{\frac{l+m+\frac{5}{2}}{l+m+\frac{7}{2}}} \left\langle m+\frac{5}{2}, \frac{1}{2} \middle| l+\frac{1}{2}, m+3 \right\rangle$$

حالا این رابطه را در رابطه ☆☆☆ جایگذاری می‌کنیم

$$\left\langle m-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| l+\frac{1}{2}, m \right\rangle = \sqrt{\frac{l+m+\frac{1}{2}}{l+m+\frac{7}{2}}} \left\langle \underset{m_l}{m+\frac{5}{2}}, \underset{m_s}{\frac{1}{2}} \middle| \underset{j}{l+\frac{1}{2}}, \underset{m}{m+3} \right\rangle$$

تا جایی می‌توانیم ادامه بدهیم که به این عبارت $\left\langle l, \frac{1}{2} \middle| l+\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2} \right\rangle$ برسیم

$$\Rightarrow \left\langle m-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| l+\frac{1}{2}, m \right\rangle = \sqrt{\frac{l+m+\frac{1}{2}}{l+\left(m+\frac{5}{2}\right)+1}} \left\langle m+\frac{5}{2}, \frac{1}{2} \middle| l+\frac{1}{2}, m+3 \right\rangle$$

با تبدیل $m+\frac{5}{2} = l$ دیگر جواب‌های زیر را به‌دست آوریم

$$\left\langle m-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| l+\frac{1}{2}, m \right\rangle = \sqrt{\frac{l+m+\frac{1}{2}}{2l+1}} \left\langle l, \frac{1}{2} \middle| l+\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{\left\langle m-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| l+\frac{1}{2}, m \right\rangle = \sqrt{\frac{l+m+\frac{1}{2}}{2l+1}}}$$

اگر به همین ترتیب بقیه مراتب را هم حساب کنیم خواهیم داشت :

$$\begin{pmatrix} |j=l+\frac{1}{2}, m\rangle \\ |j=l-\frac{1}{2}, m\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{l+m+\frac{1}{2}}{2l+1}} & \sqrt{\frac{l-m+\frac{1}{2}}{2l+1}} \\ -\sqrt{\frac{l-m+\frac{1}{2}}{2l+1}} & \sqrt{\frac{l+m+\frac{1}{2}}{2l+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |m_l = m-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \\ |m_l = m+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \end{pmatrix}$$

اینها همان توابع هماهنگ کروی هستند (Y_l^m ها)

در نتیجه توابع اسپین - هماهنگ زاویه‌ای دو مولفه‌ای را به صورت زیر خواهیم داشت :

$$\mathcal{Y}_l^{j=l\pm\frac{1}{2}, m} = \pm\sqrt{\frac{l\pm m+\frac{1}{2}}{2l+1}}\, Y_l^{m-\frac{1}{2}}(\theta,\varphi)\,\chi_+ + \sqrt{\frac{l\mp m+\frac{1}{2}}{2l+1}}\, Y_l^{m+\frac{1}{2}}\,\chi_-$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \begin{pmatrix} \pm\sqrt{l\pm m+\frac{1}{2}}\; Y_l^{m-\frac{1}{2}}(\theta,\varphi) \\ \sqrt{l\mp m+\frac{1}{2}}\; Y_l^{m+\frac{1}{2}}(\theta,\varphi) \end{pmatrix}$$

که همان رابطه‌ی 3.7.64 کتاب است.

$\mathcal{Y}$ ها ویژه توابع همزمان L^2, S^2, J^2 و J_z هستند. همچنین ویژه توابع $\vec{L}\cdot\vec{S}$ هم هستند ولی $\vec{L}\cdot\vec{S}$ مستقل از عملگرهای فوق نیست، چون

$$\vec{L}\cdot\vec{S} = \frac{1}{2}\left(J^2 - L^2 - S^2\right)$$

$$(\vec{L}\cdot\vec{S})\,\mathcal{Y}_l^{j,m} = \frac{\hbar^2}{2}\Big(j(j+1) - l(l+1) - \underbrace{s(s+1)}_{3/4}\Big) = \begin{cases} \frac{l\hbar^2}{2} & j = l+\frac{1}{2} \\ -\frac{(l+1)\hbar^2}{2} & j = l-\frac{1}{2} \end{cases}$$